ОСОБЕННОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ФРАКТАЛОВ

А.Г. Буховец

Воронежский государственный аграрный университет имени Императора Петра I,

А.К. Горностаев

Московский технологический университет (МИРЭА)

Воронеж,

10-12 февраля 2022 года

Основная идея современной парадигмы науки заключается в: «…переходе от мышления в терминах структуры к мышлению в терминах процесса. …В новой парадигме процесс мыслится как первичная категория, и любая структура, которую мы наблюдаем, есть проявление лежащего в ее основе процесса» [Мандельброт Б. Фракталы и хаос.]. На прагматическом уровне этот тезис выражается примерно так – мы можем считать, что нам что-то известно о данной совокупности объектов, если мы можем ее воспроизвести, т.е. смоделировать.

Системы итерированных функций

Системы итерированных функций (СИФ) представляют собой в самом общем виде определенный набор функций $\{f_i\}_{i=1}^{K}$, выполняемых в заданной последовательности.

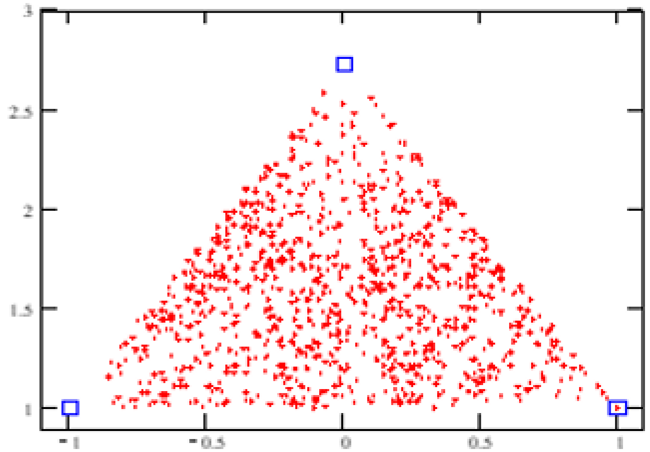
Рандомизированные системы линейных итерированных функций

Наиболее простой вид функций $\{f_i\}_{i=1}^{K}$, составляющих РСИФ – линейный, и при дополнительных ограничениях функция представляет собой выпуклую комбинацию

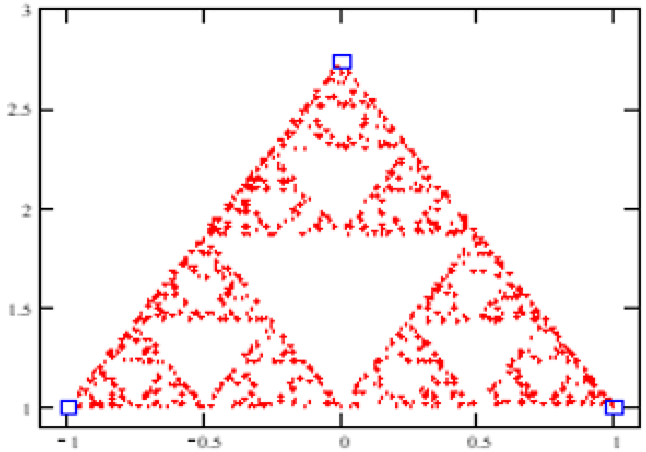
$$f^{(j)}(x_i) = \xi x_i + (1 - \xi) Z_j^{(i)} \tag{1}$$

где $0 < \xi < 1$ – фиксированное значение (параметр) и $\{Z_j\}_{j=1}^{K}$ - параметры, определяющие вид линейной функции; i – номер итерации.

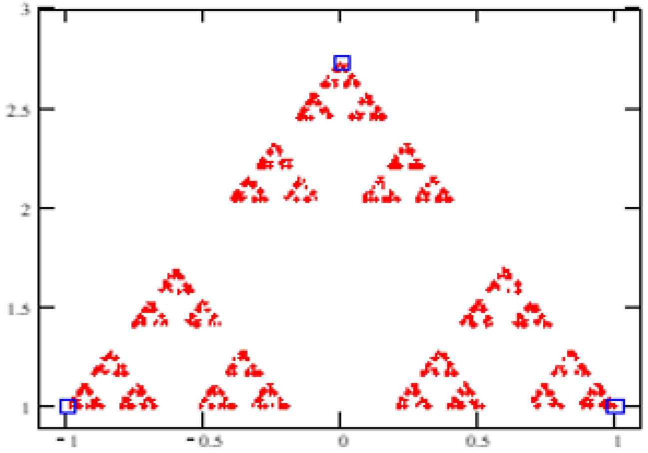
$$\{f_i/p_i\}_{i=1}^{K},\ p_i > 0,\ \sum_{i=1}^{K} p_i = 1$$



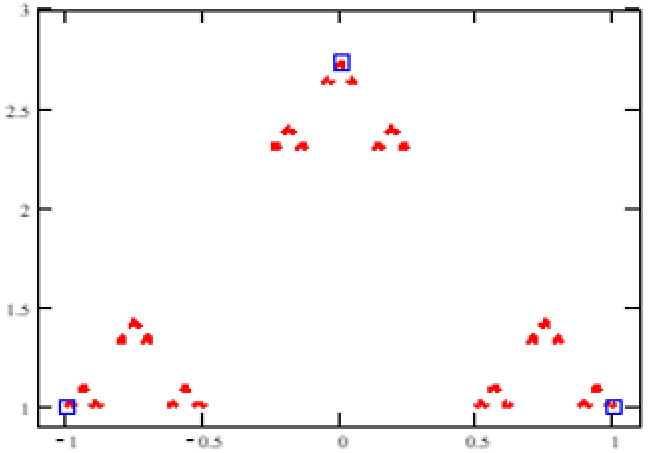
$\xi = 0{,}6 \quad (\mu = 0{,}5)$



$\xi = 0{,}5 \quad (\mu = 1)$

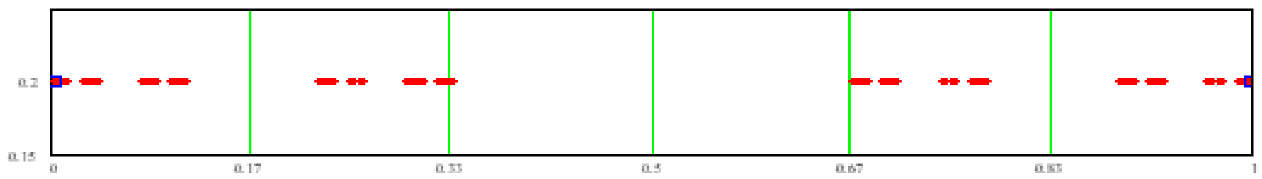


$\xi = 0{,}4 \quad (\mu = 1{,}5)$

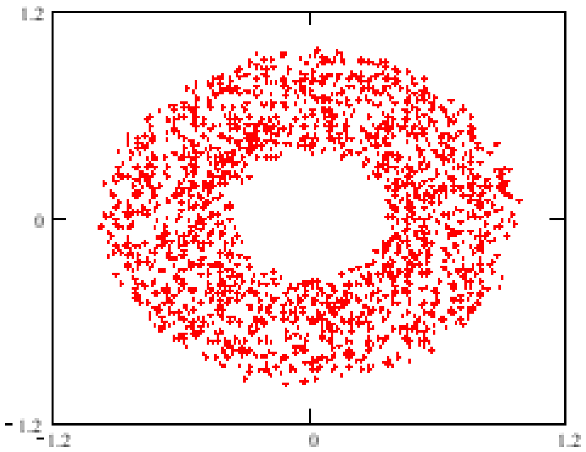


$\xi = 0{,}25 \quad (\mu = 3)$

Примеры выполнения процедуры (F1)

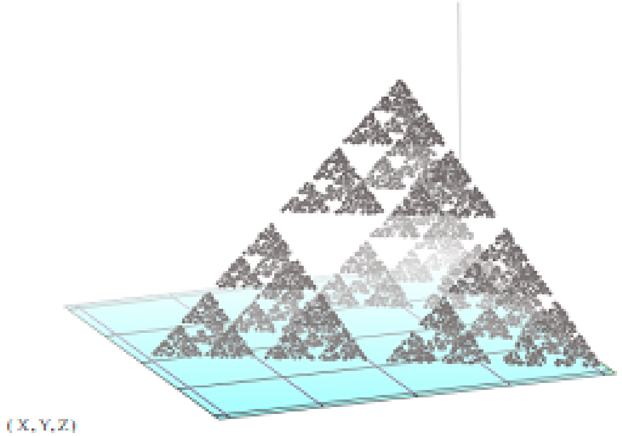


$\xi = 0{,}5 \quad (\mu = 1)$ Канторово множество



Непрерывный протофрактал

$\xi = 0{,}4 \quad (\mu = 2)$



Трехмерный случай

$\xi = 0{,}5 \quad (\mu = 1)$

Свойства получаемых в результате выполнения процедур множеств

1. Множество X может быть гомеоморфно отображено в C- множество.

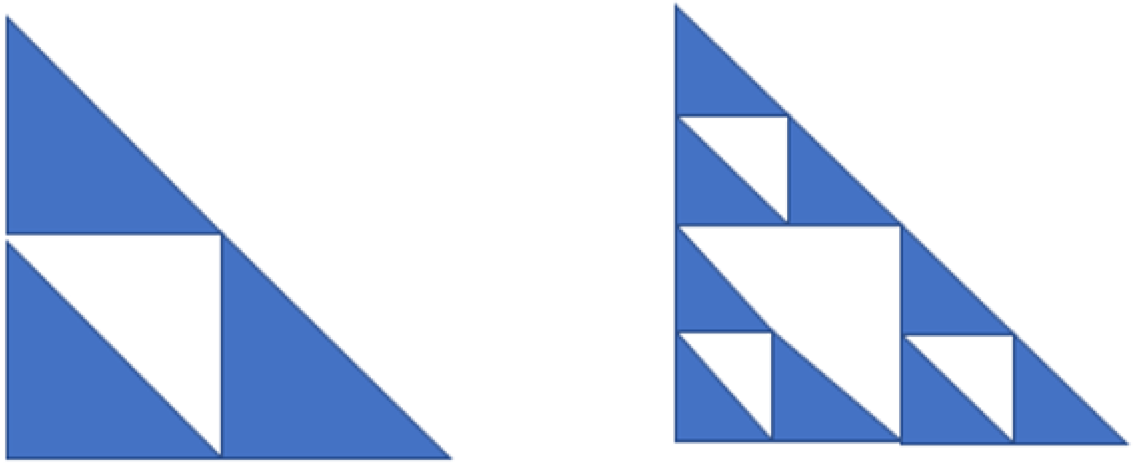
2. Множество X имеет нулевую лебеговскую меру.

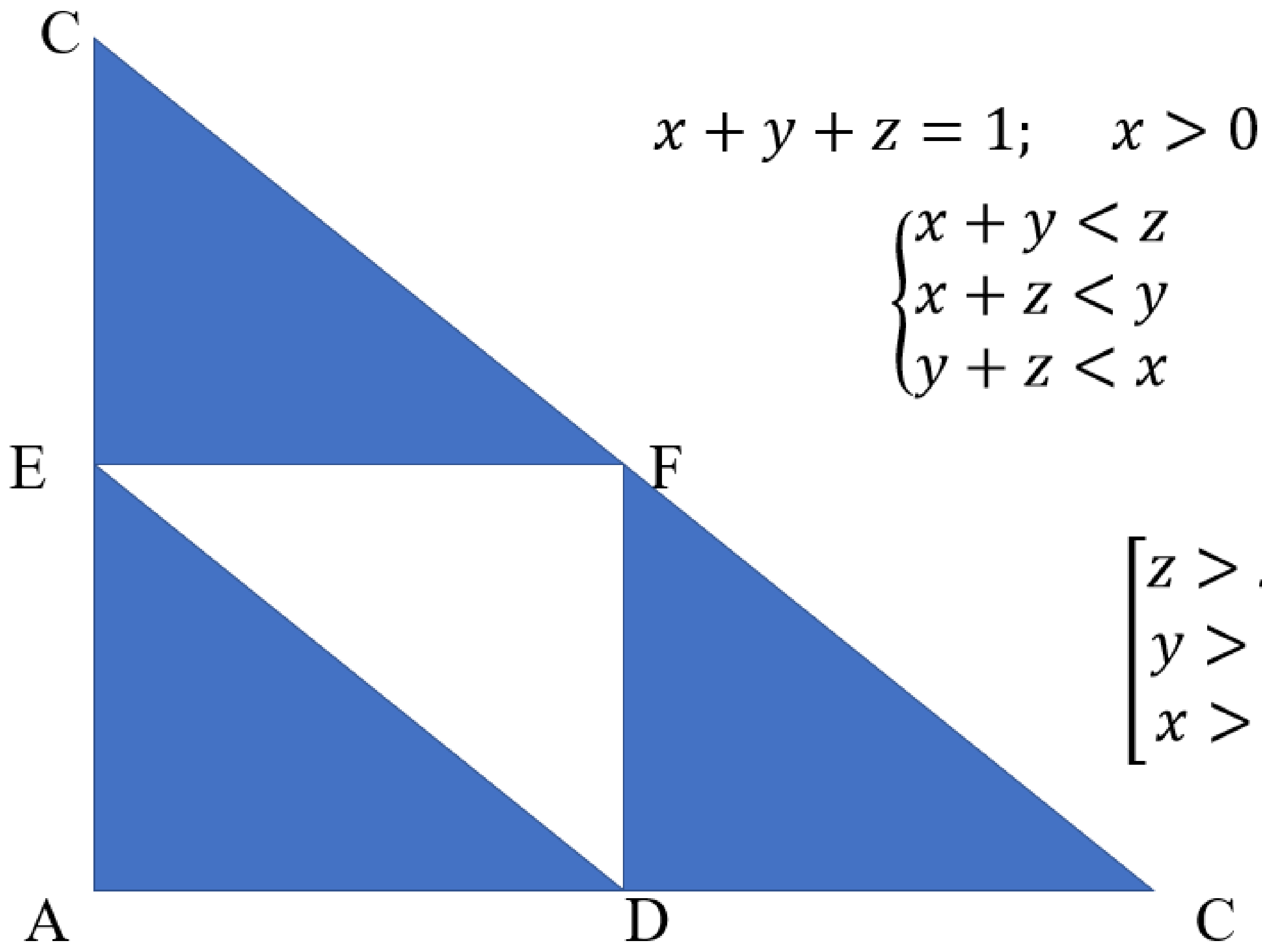
3. X – совершенное множество, т.е. замкнуто и не содержит изолированных точек.

4. X - вполне несвязно (вполне разрывно).

5. Имеют сингулярную функцию распределения.

Рассмотрим итерационный (классический) способ построения треугольника Серпинского (первые 2 шага)





$$x + y + z = 1; \quad x > 0; y > 0; z = 1 - x - y.$$

$$\begin{cases} x + y < z \\ x + z < y \\ y + z < x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x < 1/2 \\ y < 1/2 \\ x + y > 1/2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ll} z > x + y & (\Delta\, ADE) \\ y > x + z & (\Delta\, EFC) \\ x > y + z & (\Delta\, DCF) \end{array}\right.$$

Вывод: В фигурах $\Delta\, ADE, \Delta\, EFC$ и $\Delta\, DCF$ имеется в наличии доминирующая величина среди переменных x, y и z,

т.е. величина, превышающая сумму двух других.

Построение аттрактора РСИФ

Пусть x_0 – начальная точка процедуры. Тогда

$$x_1 = \xi x_0 + (1-\xi) z_j^{(1)} = \xi \beta_0, \text{ где } \beta_0 = x_0 + \tfrac{1-\xi}{\xi} z_j^{(1)};$$

$$x_2 = \xi x_1 + (1-\xi) z_j^{(2)} = \xi(\xi\beta_0 + \beta_1), \quad \text{где } \beta_1 = \tfrac{1-\xi}{\xi} z_j^{(2)};$$

$$x_3 = \xi x_2 + (1-\xi) z_j^{(3)} = \xi(\xi\beta_0 + \beta_1) + \beta_2), \quad \text{где } \beta_2 = \tfrac{1-\xi}{\xi} z_j^{(3)};$$

……………………………………………………………………

$$x_n = \xi(\ldots\xi(\xi(\xi\beta_0 + \beta_1) + \beta_2) + \cdots + \beta_n). \qquad \text{метод (F1)}$$

или

$$x_n = \beta_0 \xi^n + \beta_1 \xi^{n-1} + \beta_2 \xi^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1}\xi = \xi \sum_{m=0}^{n-1} \beta_m \xi^{n-m-1},$$

Если изменить порядок суммирования и нумерацию коэффициентов

$$x_n = \xi \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \xi^j = (1-\xi) \sum_{j=0}^{n-1} z_{(K)}^{n-j-1} \xi^j =$$

$$= (1-\xi) \left\{ z_1 \sum_{s} \xi^s + z_2 \sum_{s'} \xi^{s'} + \dots + z_K \sum_{s''} \xi^{s''} \right\} = \sum_{i=1}^{K} a_i z_i \quad ,$$

где

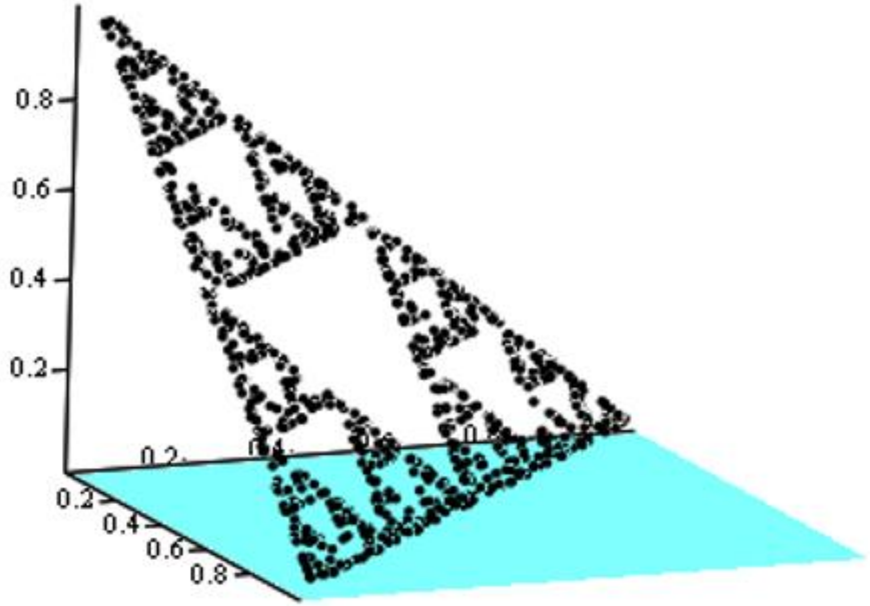
$$a_i = (1-\xi) \textstyle\sum_s \xi^s, i = 1,2, \dots, K \text{ , причем } a_i > 0, \sum_{i=1}^{K} a_i = 1.$$

Таким образом формируются векторы

$$A_i = (a_1, a_2, \dots a_i, \dots a_K),$$

из которых образуется матрица $\mathrm{A}_{N \times K}$, с помощью которой можно получить множество точек предфрактала

$$\mathrm{X} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{Z} \qquad \text{метод (F2)}$$



Множество A $= \{A_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}): i = 1, \ldots, 1000\}$ с параметрами $\xi = 1/2$ и $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$.

Коммутативная диаграмма выполнения РСИФ

$$
\begin{tikzcd}
x_n \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\mu\sum_{i=1}^{\infty}\xi^i=1"', "\{p_j\}_{j=1}^{k}"] & \xi x_n \arrow[d, "(1-\xi)z_j^{(n)}"] \\
A_{n+1} \arrow[r, "A_{n+1}Z"] & x_{n+1} \arrow[ul, "\{p_j\}_{j=1}^{k}"']
\end{tikzcd}
$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = (1-\xi)(Z-X)$$

$$X = \mathrm{AZ}$$

Покажем, что среди элементов векторов $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{im}, \dots, a_{iK})$ существует доминирующий элемент, т.е. такой, величина которого превосходит сумму всех остальных:

$$\exists\ \hat{a}_{im} = a_{im} > \sum_{j \neq m}^{K} a_{ij} \qquad (2)$$

Теорема. Для того, чтобы набор $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{im}, \dots, a_{iK})$был набором, генерированным процедурой РСИФ (1) необходимо и достаточно, чтобы для его элементов выполнялось условие (2), т.е. среди его элементов существовал доминирующий элемент.

Необходимость. Пусть $0 < \xi < 1$ тогда

$$\mu \sum_{i=1}^{\infty} \xi^i = \mu(\xi + \xi^2 + \xi^3 + \cdots + \xi^s + \cdots) = 1 \qquad (3)$$

Величину $\mu = \frac{1-\xi}{\xi}$ можно рассматривать как нормировочную константу.

В этом случае первый член ряда (3) будет равняться $\mu\xi = \frac{\mu}{1+\mu}$, а сумма оставшихся членов ряда

$$1 - \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{1}{1+\mu}.$$

Очевидно, что неравенство (2) будет выполнено при $\mu > 1$.

Достаточность. Пусть среди элементов вектора

$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{im}, \dots, a_{iK})$ имеется доминирующий, т.е. выполнено условие (2). Покажем, что значение параметра ξ можно определить так, что процедура РСИФ будет приводить к сходящемуся ряду (3).

Пусть $\hat{a}_{im} = a_{im}$ доминирующий элемент, т.е. имеет место (2). Рассмотрим равенство

$$a_{im} + \sum_{j \neq m} a_{ij} = 1,$$

из которого и (3) будет следовать, что $a_{im} > \frac{1}{2}$, а соответственно $\sum_{j \neq m} a_{ij} < \frac{1}{2}$. Полученные соотношения означают, что первый член ряда (3) должен входить в a_{im}.

Рассмотрим соотношение

$$f(\mu) = \frac{\mu}{1 + \mu}$$

как функцию параметра μ. Учитывая, что $f(1) = \frac{1}{2}$, $f'(\mu) > 0$, значения выражения $f(\mu)$ при $\mu \geq 1$ будет не меньше $\frac{1}{2}$, и, следовательно, неравенство (2) будет выполнено.

<u>Выводы</u>:

1. Установлены факты наличия доминирующего элемента в построении фракталов итеративными методами, что позволяет объяснить почему закон больших чисел и основанное на нём нормальное распределение приводят к неадекватным результатам в исследовании многих, в основном экономических, процессов, имеющих фрактальную природу.

2. Известно, что при этом условия центральной предельной теоремы, которые «по существу сводятся к требованию, чтобы влияние на сумму отдельных слагаемых было ***равномерно малым*** [курсив автора учебника Вентцель Е.С. Теория вероятностей, 1964], т.е. чтобы в состав суммы не входили члены, явно преобладающие над совокупностью остальных по своему влиянию на рассеивание суммы».

3. Вместе с тем выявленные взаимосвязи являются основой доказательства самоподобия фрактальных множеств и гомеоморфности фрактальных преобразований.

Спасибо за внимание.